Cours sur les séries entières et les développements en séries entières

Table des matières

1 Séries entières

Définition 1.1 *On appelle série entière toute série de fonctions dont le terme général est de la forme :*

$$u_n(z) = a_n z^n \text{ où } a_n \in \mathbb{C}$$

Nous allons traiter d'abord la question de la détermination du domaine de convergence, ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que la série $\sum a_n z^n$ converge.

Théorème 1.2 *Il existe un unique $R \in [0, +\infty]$, appelé rayon de convergence tel que :*

$$\text{Si } |z| < R\,, \text{ la série converge}$$

$$\text{Si } |z| > R\,, \text{ la série diverge}$$

On peut observer que la première condition, resp. la deuxième, est vide si $R = 0$, resp. si $R = \infty$. On remarque aussi que l'énoncé est muet en ce qui concerne les z tels que $|z| = R$.

Démonstration.- On note $E \subset [0, +\infty[$, l'ensemble de r tel que $a_n r^n$ est borné, et on définit :

$$R = \sup E \quad \text{et on autorise } R = +\infty.$$

Supposons que $|z| < R$, et choisissons $r \in E$ tel que $|z| < r < R$. par définition il existe $M \geq 0$ tel que

$$a_n r^n \leq M.$$

Le calcul suivant :

$$|a_n z^n| \leq a_n r^n \frac{|z|^n}{r^n} \leq M(\frac{|z|}{r})^n$$

montre la convergence de la série par comparaison à une série géométrique, puisque $\frac{|z|}{r} < 1$.

Supposons maintenant que $|z| > R$. Par définition de E, ceci implique que $|a_n z^n| = a_n|.|z|^n$ n'est pas bornée,ce qui entrîne la divergence de la série par contraposition de l'implication classique : La série $\sum u_n$ converge $\rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Le rayon R est unique puisque si R et R' remplissaient les condition du théorème avec $R < R'$, on pourrait choisir $z \in \mathbb{C}$ tel que $R < |z| < R'$ par exemple $z = \frac{R+R'}{2}$ et la contradiction viendrait des deux implications suivantes

$$R < |z| \Rightarrow \text{ la série diverge}$$

$$R' > |z| \Rightarrow \text{ la série converge}$$

□

Définition 1.3 *On appelle rayon de convergence de la série entière l'unique nombre R défini par le théorème 1.2, et disque de convergence (resp. intervalle de convergence lorsqu'on s'interesse unique mant à une variable réelle) l'ensemble :*

$$D = \{z \in \mathbb{C}, \quad |z| < R\}.$$

$$\textit{resp. } I =]-R, R[.$$

Le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ contient donc D et est contenu dans le disque fermé :

$$\overline{D} = \{z \in \mathbb{C}, \quad |z| \leq R\}.$$

<u>Quelques exemples</u> :

1) $u_n(z) = n^\alpha z^n$. Quelque soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé le rayon de convergence est 1. En effet :

$$\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} = (1 + \frac{1}{n})^{alpha}|z| \text{ tend vers } |z| \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

donc la série diverge si $|z| > 1$ et converge si $|z| < 1$.

2) $u_n(z) = e^{-n^2} z^n$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, notons $|z| = r$. On a

$$|u_n(z)| = (e^{-n}r)^n$$

Il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $e^{-n}r < 1/2$ donc $|u_n(z)| \leq (1/2)^n$ ceci prouve la converences absolue de la série.

Conclusion : dans cet exemple $R = +\infty$.

3) $u_n(z) = n^n z^n$. On a $u_n(z) = (nz)^n$ et quel que soit $z \neq 0$, et dès que $n \geq \frac{1}{|z|}$, on a $u_n(z) \geq 1$ Par conséquent le terme général ne tend pas vers zéro et la série diverge.

On observera que pour le cas $|z| = R$, le théorème 1.2 ne fournit aucun énoncé général et qu'il ne saurait en être autrement comme le suggère le exemples suivants, tous avec $R = 1$ et le même disque ouvert $D = D(\underline{0}, 1)$:

- La série $u_n(z) = \frac{z^n}{n^2}$ converge normalement dans le disque fermé $\overline{D}$
- La série $u_n(z) z^n$ diverge en tout point du cercle $\partial(\overline{D}) = \{z \in \mathbb{C}, \quad |z| = 1\}$. A noter le fait que cela n'empêche pas la fonction $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-x}$ de pouvoir être prolongée par continuité en tout point de ce cercle autre que 1.
- La série $u_n(z) = \frac{z^n}{n}$ diverge si $z = 1$, mais converge pour tout autre z de module 1. Il suffit d'appliquer à $u_n(e^{i\theta}) = \frac{e^{in\theta}}{n}$ la *règle d'Abel* permet de conclure.

Proposition 1.4 *Soit $u_n(z) = a_n z^n$ le terme général d'une série entière de rayon de convergence non nul : $R > 0$. Quel que soit r avec $0 \leq r < 0$, la série converge uniformément dans le disque fermé $\overline{D}(\overline{0}, r)$.*

Démonstration.- C'est pratiquement le même calcul que dans la démonstration du théorème 1.2 puisque nous ne faison qu'en donner ici une version plus precise. On fixe r_1 et M tel que

$$r < r_1 < R\,, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} |a_n r_1^n| \leq M$$

Alors on obtient en refaisant le même calcul que dans la démonstration précitée :

$$\forall z \in \overline{D}(\overline{0}, r)\,, \quad |a_n z^n| \leq |a_n| r^n \leq M(\frac{r}{r_1})^n$$

Comme $M(\frac{r}{r_1})^n$ est le terme général d'une série numérique convergente, on a bien établi que la série entière converge normalement donc uniformément dans le disque $\overline{D}(\overline{0}, r)$. □

Corollaire 1.5 *Soit $u_n(z) = a_n z^n$ le terme général d'une séries entière de rayon de convergence non nul : $R > 0$. Alors la fonction $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est continue dans le disque ouvert de convergence D.*

Il suffit d'appliquer le théorème (convergence uniforme $\Rightarrow$ continuité) du chapitre précédent pour avoir la continuité sur chaque disque fermé $\overline{D}(\overline{0}, r)$, donc sur leur réunion $\overline{D}$.

Théorème 1.6 *Sommes et produits de séries entiéres Soient* $u_n(z) = a_n z^n$ *et* $v_n(z) = b_n z^n$ *les termes généraux de deux séries entières de rayons de convergence repectifs* R_1 *et* R_2 *de sommes* f *et* g *définies dans leur disques de convergence respectifs :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ , , } si\ z \in D(0, R_1)$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \text{ , , } si\ z \in D(0, R_2)$$

Alors

1) La série de terme général $(a_n + b_n)z^n$ *a un rayon de convergence* $R \geq \inf(R_1, R_2)$*. De plus si* $0 \leq R_1, R_2$ *on a* $R = \min(R_1, R_2) = R_1$*. Enfin dans le disque* $D(0, R_1) \cap D(0, R_2)$ *de rayon* $\min(R_1, R_2)$*, la somme de cette série est* $f(z) + g(z)$*.*

2) La série de terme général $c_n z^n$ *où* $c_n = a_0 b_n + \ldots + a_i b_{n-i} + \ldots + a_n b_0$ *a un rayon de convergence* $R \geq \inf(R_1, R_2)$*. De plus dans le disque* $D(0, R_1) \cap D(0, R_2)$ *de rayon* $\min(R_1, R_2)$*, la somme de cette série est* $f(z)g(z)$*.*

Démonstration.- Il s'agit simplement de voir que la série de terme général $(a_n + b_n)z^n$ est pour $|z| \leq \min(R_1, R_2)$, la somme des deux séries absolument convergente $u_n(z)$ et $v_n(z)$ et que la série de terme général $c_n z^n$ en est le produit de Cauchy.

On peut visualiser ce résultat ainsi ;

$$\left[a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots\right] . \left[b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots\right] = \left[a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + \ldots\right]$$

□

Remarque Il est possible d'avoir $R > \min(R_1, R_2)$ dans le cas $R_1 = R_2$ pour la somme : prendre tout simplement $a_n = -b_n$ qui donne $R + \infty$.

Pour le produit on peut encore trouver des exemples où $R > \min(R_1, R_2)$ sans que la contrainte $R_1 = R_2$ sit necessaire.

Complément : formule de Hadamart- admise

Proposition 1.7 *Le rayon de convergence de la série entière* R *est donné par la formule :*

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n \to \infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

Dans cet énoncé on adopte la convention $\frac{1}{+\infty} = 0$ et $\frac{1}{0} = +\infty$

2 Dérivation terme à terme des séries entières.

On se restreint ici au cas d'une variale réelle $x \in]-R, R[$ et à des séries entiéres $\sum a_n x^n$ où on autorise $a_n \in \mathbb{C}$.

Théorème 2.1 .- *Soit* $f\ :]-R, R[\to \mathbb{C}$, *la somme d'une série entière de rayon de convergence* R, $f(x) = \sum_{n=0}^{infty} a_n x^n$. *Alors*

1) f *est continue sur* $]-R, R[$

2) La série entière $g(x) = \sum_{n=1}^{infty} n a_n x^{n-1}$ *a le même rayon de convergence* R.

3) f *est dérivable sur* $]-R, R[$, *et* $f' = g$

Démonstration Montrons d'abord lénoncé 2). Si $o < |x| < R$, on peut choisir r tel que $|x| < r < R$. On note $\lambda = \frac{|x|}{r} < 1$, et $M \geq 0$ la borne suérieure des $|a_n x^n|$ dont l'existence est assurée par le fait que $r < \tilde{R}.$:

$$\forall n \in \mathbb{N} |a_n x^n| \leq M$$

Puisqu'on peut écrire la majoration :

$$|n a_n x^{n-1}| = \frac{n|a_n|}{|x|} \lambda^n r^n \leq \frac{M}{|x|} n \lambda^n$$

et que la série de terme général $n\lambda^n$ converge on en déduit que la série $n a_n x^{n-1}$ converge aussi.

Si $|x| > R$, alors $|a_n x^n|$, n'est pas borné. Il en est donc de même de la série dérivé puisque : $|n a_n x^{n-1}| > |a_n x^n|$, dès que $n > |x|$.

Donc la série de terme général $|n a_n x^{n-1}$ pour $|x| > R$, ce qui termine la démonstration du point 2).

Fixons alors $r < R$. On a vu dans la proposition 1.4 que la série $\sum a_n x^n$ converge uniformément dans l'intervalle $[-r, r]$, ce qui assure la continuité de f, comme on l'a déj'a vu. D'å'es le point 2), la série dérivée, $u_n'(x) = n a_n x^{n-1}$ converge aussi uniformément sur $[-r, r]$, ce qui assure la dérivabilité de f d'après le théorème de dérivation terme à terme des série de fonction.

Cette dérivabilité et l'égalité $f'(x) = \sum_{n=1}^{infty} n a_n x^{n-1}$ sont finalement valables sur tous les intervalles $[-r, r]$, donc sur leur réunion $]-R, R[$.

$\square$

Corollaire 2.2 *Soit* $f\ :]-R, R[\to \mathbb{C}$, *la somme d'une série entière de rayon de convergence* R, $f(x) = \sum_{n=0}^{infty} a_n x^n$. *Alors la série entière* $a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \ldots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$ *a pour rayon de convergence* R *et on a :*

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{i=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad si\ |x| < R.$$

Quelques exemples

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

$$ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots$$

$$ln(1 = x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \ldots$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n + \ldots$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

3 Fonctions développables en séries entières

Commençons par poser le problème ; soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$. La fonction f est dite développable en série entière au voisinage de x_0, s'il existe une série entière $\sum a_n t^n$ de rayon de convergence R telle qu'on ait l'égalité suivante, valable dans un intervalle $]x_0 - r, x_0 + r[\subset I$ tel que $r \leq R$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n , \qquad \text{si } |x - x_0| < r$$

L'énoncé suivant donne des conditions néecessaires importantes :

Théorème 3.1 *Soit f une fonction développable en série entière dans l'intervalle, centré en x_0, $]x_0 - r, x_0 + r[$. Alors f est indéfiniment dérivable dans cet intervalle, et les coefficient a_n sont uniques et déterminés par f selon la formule :*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Démonstration.- Selon le théorème de dérivation terme à terme des séries entières les séries dérivées

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n t^{n-k}$$

ont le même rayon de convergence que le série initiale et leur somme est la dérivé $k$ième de la somme initiale, ce qui donne appliqué à f dans $]x_0 - r, x_0 + r[$:

$$f^{(0)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k} = \sum_{m=0}^{+\infty}(m+k)\dots(m+1)a_{m+k}(x-x_0)^m$$

L'identification du terme constant donne bien $f^{(k)}(0) = k!a_k$

$\square$

Les deux exemples suivant montrent que la condition trouvée n'est pas suffisante, et qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ peut ne pas être développable en série entière :

Exemple 1-. La fonction $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

En effet le caractère $\mathcal{C}^\infty$ est clair sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et on montre par récurrence sur n une formule :

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} e^{\frac{-1}{x^2}}$$

où P_n et Q_n sont des polynômes. La formule de récurrence est

$$\frac{P_{n+1}(x)}{Q_{n+1}(x)} = \frac{P_n'(x)Q_n(x) - P_n(x)Q_n'(x)}{Q_n(x)^2}$$

On en déduit aussi que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x)}{x} = 0.$$

Ce qui permet de montrer par récurrence que f est indéfiniment dérivable en 0 avec $f^{(n)}(0) = 0$. En effet si $f^{(n)}(0) = 0$, la relation précédente est exactement le pas suivant de la récurrence :

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = 0.$$

La série de Taylor de f est alors $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} = 0$, qui certes vonverge pour tout x mais

$$\forall x \in \neq 0\,, \quad f(x) \neq 0 = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}$$

et la fonction f n'est pas développable en série entière e 0.

Exemple 2.- Soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} e^{in^2 x}$$

Cette série de fonction définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, car la séris est normalement donc uniformément convergente ainsi que toutes les séries dérivées et on a :

$$f^{(k)}(x) = i^k \sum_{n=0}^{\infty} n^{2k} e^{-n} e^{in^2 x}$$

On peut montrer que cette fois la série de Taylor a un rayon de convergence nul. La fonction f n'est donc pas développable en série entière en 0.

4 Développement en séries entières de fonction usuelles.

Rappelons la formule de Taylor-Lagrange, cette fois pour f à valeur dans $\mathbb{R}$.

Si f est $n+1$ fois dérivable sur un intervalle $]x_0-\rho, x_0+\rho[$, on a :

$$\exists c = x_0 + \theta(x - x0), \theta \in]0,1[,\ f(x) = f(0) + f'(0)x + \ldots + f_{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + f_{(n+1)}(c)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

La fonction f $\mathcal{C}^\infty$ est développable en série entiere ssi le "reste" $|f(x) - \left[f(0) + f'(0)x + \ldots + f_{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}\right]|$ tend vers zéro et dans les exempes suivant on utilise la forme de Taylor $f_{(n+1)}(c)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ de ce reste.

Exemple 1 La fonction e^x est développable en séries entière sur $\mathbb{R}$ et

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad R = \infty$$

En effet $f'(x) = e^x$ et pour tout n, $f^{(n)}(x) = e^x$, donc $|e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^n}{n!}| = \frac{x^{n+1}e^c}{(n+1)!} < \frac{x^{n+1}e^{|x|}}{(n+1)!}$ qui tend vers zéro pour tout x quand $n \to \infty$.

Le développements en séries entières suivant en découlent :

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad R = \infty$$

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \qquad R = \infty$$

$$a^x = e^{xlna} = 1 + lnax + \ldots + (lna)^n\frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad R = \infty$$

Exemple 2 La fonction $\cos x$ est développable en séries entière sur $\mathbb{R}$ et

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad R = \infty$$

En effet $f'(x) = -\sin x$, $f"(x) = -\cos x$, et plus généralement $f^{2n+1}(x) = (-1)^{n-1}\sin x$, $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x$ donc $f^{2n+1}(0) = 0$, $f^{(2n)}(0) = (-1)^n$. La formule de Taylor est donc à l'ordre $2n$:

$$|\cos x - \big[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\big]| = |(-1)^n \sin c \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

et le reste tend vers zéro de la même façon que pour e^x.

Pour la fonction sinus on a un résultat similaire :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \qquad R = \infty$$

Exemple 3 Développement de $(1+x)^\alpha$.

Théorème 4.1 *La fonction $f(x) := (1+x)^\alpha$ admet le développement en série entière valable dans* $]-1, 1[$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots$$

Démonstration.- La série de Taylor de $(1+x)^\alpha$ est bien la série proposée de le terme général $u_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$, puisque $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$

La série de Taylor de f a pour rayon de convergence un puisque :

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{\alpha - n}{n+1} . x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -x$$

Ce qui montre que la série converge si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$ d'après la règle de D'Alembert.

Définissons alors

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \,, \text{ pour } x \in]-1, 1[$$

Il s'agit de voir que $f(x) = g(x)$ sur $]-1, +1[$. Puisque $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, f est *l'unique* solution de léquation différentielle :

$$(1+x)y' = \alpha y$$

telle que $f(0)$ Pour établir l'égalité demandée, il suffit donc de s'assurer que g satisfait aux même conditions. En effet $g(0) = 1$ et par le théorème de dérivation terme à terme des séries entières :

$$\begin{aligned}(1+x)g'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}(1+x)\\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m)}{m!}x^m + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}(\alpha-n+n)x^n = \alpha g(x)\end{aligned}$$

□

Exemples et applications

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots + (-1)^p \frac{1.3.\dots(2p-3)}{2.4.\dots(2p)}x^p + \dots \qquad R = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{\frac{-1}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^2}{8} + \dots + \frac{1.3.\dots(2p-1)}{2.4.\dots(2p)}x^{2p} + \dots \qquad R = 1$$

donc par intégration :

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{1.3.\dots(2p-1)}{2.4.\dots(2p)}\frac{x^{2p+1}}{2p+1} + \dots \qquad R = 1$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \dots - \frac{1.3.\dots(2p-1)}{2.4.\dots(2p)}\frac{x^{2p+1}}{2p+1} + \dots \qquad R = 1$$

5 Recherche de solution d'équations différentielles par des séries entières.

On "oublie" provisoirement l'existence de la fonction $x \to e^x$.

Proposition 5.1 *Il existe une unique fonction $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ développable en série entière définie sur $\mathbb{R}$, soution de léquation différentielle*

$$y' = y$$

telle que $f(0) = 1$ et on a $f(a+b) = f(a)f(b)$.

Démonstration Si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

la relation $f' = f$ ou $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ se traduit par la suite déquations : $a_n = (n+1)a_{n+1}$, qui implique parrécurrence compte tenu de $a_0 = f(0) = 1$, que $a_n = \frac{1}{n!}$.

De la même façon il existe une unique solution $f_\alpha(x) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ telle que $f_\alpha(0) = \alpha$. Appliqué à $\alpha = f(a)$, cela donne $f(a)f(x) = f(a+x)$, les deux mambres étant solution de $y' = y$. $\square$

Il est immédiat que f est monotone croissante sur $[0, +\infty[$, et que pour $x > 0$, $f(x) > 1+x$, donc que $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. On en déduit aussi que pour $x \leq 0$, on a $f(x) = \frac{1}{f(-x)}$, est croissante de 0 à 1, sur $]-\infty, 0]$.

Finalement on a une bijection de classe $\mathcal{C}^\infty$, $f \; : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$.

Si on note ln, son inverse $(ln(f(x)) = x)$ on a bien par le théorème de dérivation d'un inverse :

$$ln'(y) = \frac{1}{f'(ln(y))} = \frac{1}{y}$$

et on retrouve la définition usuelle de ln comme primitive de $\frac{1}{y}$, donc de $f(x) = e^x$.

Un autre exemple : trouver une solution de $4xy" + 2y' - y = 0$ développable en série entière dans un intervalle $]-r, r[$.

Les calculs se mènent ainsi :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad y" = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\begin{aligned}
4xy" + 2y' - y =& 4\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
=& 4\sum_{m=1}^{\infty} (m+1)m a_{m+1} x^m + 2\sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} x^m - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} \left[4(n+1)n a_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1} - a_n\right] x^n \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} \left[(2n+1)(2n+2))a_{n+1} - a_n\right] x^n
\end{aligned}$$

On en tire pour tout n : $(2n+1)(2n+2))a_{n+1} - a_n = 0$, donc par récurrence $a_n = \frac{a_0}{(2n)!}$

6 La fonction exponentielle

La série de terme général $f_n(z) = \frac{z^n}{n!}$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ puisque :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|f_{n+1}(z)|}{|f_n(z)|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0$$

Définition 6.1 *On appelle fonction exponentielle* exp $: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, *la fonction somme de série entière définie pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *par*

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

On note aussi $exp(z) = e^z$. Une fois définie la fonction logarithme $\ln\ :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ et le nombre e, unique solution de l'équation $\ln x = 1$, cette notation sera conforme à la définition de la fonction puissance $z \to a^z$, pour $a > 0$ fixé, donnée par la formule :

$$a^z = \exp(\ln a.z)$$

L'objet de cette section est de montrer que la fonction exponentielle ainsi définie permet de reconstituer les fonctions usuelles suivantes de la variable réelle, x :

$$x \to e^x\,, \quad x \to \ln x\,(x > 0)\,, \quad x \to e^{ix}\,, \quad x \to \cos x = \Re(e^{ix})\,, \quad \sin x = \Im(e^{ix})$$

Le point de départ est la **formule fondamendale de l'exponentielle** :

Théorème 6.2 .- *Quelque soient* $z_1 \in \mathbb{C}$ *et* $z_2 \in \mathbb{C}$, *l'égalité suivante a lieu :*

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 + \exp z_2$$

ou en notation puissance : $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$

Démonstration.- Il s'agit d'une application combinée de la formule du produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes et de la formule du binôme appliquée à chaque terme de la série obtenue. Pour le premier ingrédient il s'agit de multiplier entre elles les deux séries absolument convergentes dont les sommes sont respectivement $\exp z_1$ et $\exp z_2$:

$$\exp z_1 . \exp z_2 = \Big(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{z_1^p}{p!}\Big) \cdot \Big(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{z_2^q}{q!}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(z)$$

avec

$$w_n(z) = \sum_{p+q=n} \frac{z_1^p}{p!} \cdot \frac{z_2^q}{q!} = \frac{1}{n!}\Big[\sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!(n-p)!} z_1^p z_2^{n-p}\Big] = \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!}$$

On reconnaît dans la dernière égalité la formule du binôme et en rassemblant les égalités trouvées on obtient bien comme annoncé :

$$\exp z_1 . \exp z_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = \exp(z_1 + z_2)$$

□

Nous énumérons maintenant quelques conséquences toutes plus ou moins immédiates de la formule fondamentale :

1. Quel que soit $z \in \mathbb{C}$, e^z est inversible d'inverse e^{-z}.

   En effet $exp(0) = 1$, se constate directement sur la définition et d'après la formule fondamentale : $e^z \cdot e^{-z} = e^(z - z) = e^0 = 1$

2. La fonction de la variable réelle x, $x \to e^x$ est dérivable et égale à sa propre dérivée. Il suffit d'appliquer le théorème de dérivation terme à terme des séries entières :

$$\exp'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{x^n}{n!})' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = exp(x)$$

   Le tableau de variations suivant s'en déduit facilement :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$exp'(x) = e^x$		$+$	1	$+$	
$f(x) = e^x$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

   Le fait que $e^x > 0$, et que $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, se déduit facilement de l'expression de e^x comme somme d'une série à termes tous ≥ 0, et pour la limite en $+\infty$ de l'inégalité $e^x \geq 1 + x$.

   Pour le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, écrire par exemple pour $x < 0$,

$$e^x = e^{-|x|} = \frac{1}{|x|} > 0.$$

   Cette inégalité assure à la fois la monotonie de la fonction exp, et la limite en $-\infty$.

3. L'étude précédente montre que la fonction exp établit une bijection croisante de $\mathbb{R}$ vers $]0, +\infty[$. La bijection réciproque est la fonction logarithme népérien $\ln\ :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, dont les propriétés, y compris la formule $\ln' x = \frac{1}{x}$, se déduisent des théorèmes généraux sur les fonctions réciproques. Je renvois à ces chapitres usuellement faits en L1 [1]

4. **Exponentielle des imaginaires purs.** Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\overline{e^{ix}} = \overline{e^{-ix}}$, et $Z = e^{ix}$ est de module égal à 1.

   En effet l'opération de conjugaison commute à la sommation des séries (et le conjugué de i est $-i$! !) :

$$\overline{e^{ix}} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{(ix)^n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ix)^n}{n!} = e^{-ix}$$

   La formule pour le module est alors immédiate :

$$|e^{ix}|^2 = e^{ix}\overline{e^{ix}} = e^{ix}e^{-ix} = 1$$

[1]Une autre présentation possible consiste à définir d'abord ln comme une primitive de $\frac{1}{x}$, puis de voir l'exponentielle réelle comme sa fonction réciproque. Dans cette présentation il y a toujours un point théorique délicat. Ce n'est plus la théorie des séries mais l'existence d'une primitive pour une fonction continue...

On définit alors les fonctions trigonométriques usuelles comme des parties réelles et imaginaires :

$$\cos x = \Re e^{ix} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\,, \quad \sin x = \Im e^{ix} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

La formule $|e^{ix}|^2 = 1$ devient alors la formule bien connue $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et la formule fondamentale $e^{i(a+b)} = e^{ia} \cdot e^{ib}$, devient :

$$\cos(a+b) + i\sin(a+b) = [\cos a + i\sin a] \cdot [\cos b + i\sin b]$$

qui en développant et en séparant les parties réelles et imaginaires permet de retrouver sans effort de mémoire les formules d'addition et toute celle de la trigonométrie qui s'ensuivent.

Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, le module de e^z, s'obtient alors par :

$$e^z = e^x \cdot e^{iy}$$

On sera alors tenté en faisant appel à nos connaissances de la définition géométrique des nombres complexes de dire que y est l'argument du nombre complexe $Z = e^{(x+iy)}$.

Mais pour s'assurer que tout nombre complexe $Z \in \mathbb{C}$ non nul peut s'écrire $e^x \cdot e^{iy}$ et être doté d'un argument il y a quelque chose à démontrer qui dépasse en complexité la simple énumération ci dessus

Nous admettrons les résultats suivants :

L'application $\exp\ : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\star$ est surjective, ou ce qui revient essentiellement au même

$$\text{L'application }]0, +\infty[\to U\,, \quad x \to e^{ix}\,, \quad \text{ est surjective}$$

si on définit $U = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$, comme le cercle unité des nombres complexes de module 1.

Nous renvoyons aux manuls complets de L2, pour une démonstration détaillée de ce résultat qui comprend une étude détaillée des fonctions cos et sin, leur périodicité, la définition du nombre π, et qui redonne tout le paysage habituel.

C'est un peu long mais élémentaire sur le plan théorique.

A noter seulement pour terminer comment on peut retrouver en un coup la dérivation des fonctions cos et sin, à partir de la formule naturelle issue de la dérivation terme à terme des séries entières

$$\left(e^{ix}\right)' = ie^{ix} = i(\cos x + i\sin x) = -\sin x + i\cos x$$

d'où et à nouveau sans effort de mémoire en séparant parties réelles et imaginaires :

$$\cos' x = -\sin x\,, \quad \sin' x = \cos x$$