UNIVERSITE D'ANGERS Mathématiques L2.

Devoir 2. A rendre selon les groupes le jeudi 6/12 ou le mardi 6/12/2013.

Les étudiants sont invités à rendre ce devoir **par binôme voire par trinôme**.

Se concentrer en priorité sur l'exercice 1.

Ce devoir est un extrait de la session un 2012-2013.

Exercice 1 :

Déterminer la nature des cinq séries dont le terme général est donné ci-dessous :

$$a_n = n, \quad b_n = \frac{n^6}{6^n} \quad c_n = \frac{(2n)!}{n^{2n}} \quad d_n = \frac{ln(n)}{n^2} \quad e_n = (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

On rappelle que $e > 2$. Dans certains exemples il pourra être utilisé la règle de D'Alembeert. Dans d'autres la "règle $n^\alpha u_n$" pourra être utile voir le rappel.

Exercice 2 : On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 0, u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$$

1) On remarque que $u_n > 0$ quelque soit $n \geq 1$. Le vérifier. Déterminer la limite de la suite (u_n), puis en déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

2) Pour tout $n \geq 0$, on pose $v_n = (-1)^n u_n$. La série de terme général v_n est-elle absolument convergente ?

3) Exprimer $u_{n+1} - \frac{1}{n+1}$ en fonction de u_n et de n. En déduire un équivalent de $w_n = u_n - \frac{1}{n}$ lorsque n tend vers linfini. Quelle est la nature de la série de terme général w_n ?

4) En déduire la nature de la série de terme général v_n (on écrira $u_n = w_n + \frac{1}{n}$) .

Rappel : Soit $u_n > 0$ considéré comme le terme général d'une série. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $n^\alpha u_n \longrightarrow \ell \in [0, +\infty]$. Alors :

1) Si $\alpha < 1$ et si $\ell > 0$ la série diverge.

2) Si $\alpha > 1$ et si $\ell < +\infty$ la série converge