Université d'Angers **Licence 2 – MPCIE**
2014–2015

Contrôle continu d'Analyse 1

Corrigé

Exercice 1 –

1. Démontrer par la méthode de son choix que le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction tangente est donné par :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)\ .$$

Voir vos notes sur l'exercice 4 de la feuille de TD 1. On pouvait aussi s'en tirer par un calcul de division selon les puissances croissantes.

2. Déterminer la limite lorsque $x \longrightarrow 0$ de

$$\frac{1}{x^4}\left(\frac{\sin x}{\cos x + \sin x} - \tan\left(\frac{x}{1+x}\right)\right)\ .$$

On a $\frac{\sin x}{\cos x+\sin x} = \frac{\tan x}{1+\tan x}$. On est donc amené à considérer $f(u) = \frac{u}{1+u}$ qui admet le DL suivant en $u_0 = 0$:

$$\frac{u}{1+u} = u - u^2 + u^3 - u^4 + o(u^4)$$

Posons $u(x) = \tan x$ dont le DL est donné dans la question 1. On trouve en composant et tronquant :

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{\cos x + \sin x} =& f(\tan x) = x + \frac{x^3}{3} - (x + \frac{x^3}{3})^2 + (x + \frac{x^3}{3})^3 - (x + \frac{x^3}{3})^4 + o(x^4)\\ =& x + \frac{x^3}{3} - (x^2 + \frac{2}{3}x^4) + x^3 - x^4 + o(x^4) = x - x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{3}x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

On opère de même par composition de DL pour $\tan\left(\frac{x}{1+x}\right) = \tan(f(x))$ où on observe que les rôles sont échangés avec cette fois[1] $u(x) = f(x) = x - x^2 + x^3 - x^4 + o(x^4)$:

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{x}{1+x}\right) &= x - x^2 + x^3 - x^4 + \frac{1}{3}(x - x^2 + x^3 - x^4)^3 + o(x^4)\\ &= x - x^2 + x^3 - x^4\frac{1}{3}(x^3 - 3x^4)^3 + o(x^4) = x - x^2 + \frac{4}{3}x^3 - 2x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{x^4}\left(\frac{\sin x}{\cos x + \sin x} - \tan\left(\frac{x}{1+x}\right)\right) = \frac{1}{x^4}\left(-\frac{5}{3}x^4 + 2x^4\right) = \frac{1}{3} + o(1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$$

[1] j'ai lu souvent le calcul suivant $\tan\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{x}{1+x} + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + o(x^3)$. Ce n'est pas un égalité fausse mais ce n'est pas un DL et cela ne mène à rien, si on poursuit par l'idée saugrenue de réduire au même dénominateur et de se lancer dans des calculs épouvantables au lieu de revenir aux DL.

Exercice 2 –
On considère la courbe définie par les équations paramétriques :

$$x(t) = t + \frac{1}{t}\,, \quad y(t) = \frac{1}{t(t-2)}.$$

On ne demande pas un tracé complet mais l'étude des éléments suivants, qu'on illustrera par un dessin :
1) Montrer qu'il existe un seul point stationnaire en $t = 1$ et l'étudier : tangente, nature du point de rebroussement position de la courbe selon le signe de h, où $t = t_0 + h$.
On trouve facilement[2] :

$$x'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2-1}{t^2} \quad \text{et} \qquad y'(t) = \frac{2-2t}{t^2(t-2)^2}$$

Le calcul de la dérivée $y(t)$, est plus facile en observant l'égalité $y(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t}\right)$, qui reservira dans la question 2. On en tire $y'(t) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{(t-2)^2} - \frac{1}{t^2}\right)$.
On obtient alors $[x'(1) = 0 \text{ et } y'(1) = 0] \iff t = 1$ ce qui montre qu'il y a un seul point stationnaire pour la valeur $t_0 = 1$ du paramètre, les coordonnées de ce point étant :

$$M(1) = (x(1), y(1)) = (2, -1).$$

On effectue un DL de $x(t)$ et $y(t)$ au voisinage de $t_0 = 1$, le plus simple étant de poser : $t = 1 + h$:

$$\begin{cases} x(t) = x(1+h) = 1 + h + \dfrac{1}{1+h} \\ \qquad\;\; = 1 + h + 1 - h + h^2 - h^3 + o(h^3) = 2 + h^2 - h^3 + o(h^3). \\ y(t) = y(1+h) = \dfrac{1}{(1+h)(-1+h} = -\dfrac{1}{1-h^2} = -1 - h^2 + o(h^3) \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}(t-1)^2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}(t-1)^3 + o((t-1)^3).$$

Comme les deux vecteurs $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, coefficient de $(t-1)^2$ et $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, coefficient de $(t-1)^3$ sont indépendants, $M(1)$ est un point de rebroussement de première espèce. cf figure 1.

2) Déterminer les branches infinies et les étudier : directions asymptotiques, asymptotes éventuelles et position de la courbe par rapport à l'asymptote.
Voici la discussion. Les trois asymptotes seront rassemblées dans la figure 2.[3]

1. **Quand** $t \to \pm\infty$.
   On constate que $y(t) \to 0^+$, parce que $y(t) \underset{t\to\pm\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$. Puisque par ailleurs $\lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t) = \pm\infty$, la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote que ce soit pour $t \to +\infty$ ou $t \to -\infty$ et la courbe est au dessus de son asymptote pour $|t|$ assez grand.

[2]faut il encore rappeler que $(t^\alpha)' = \alpha t^{\alpha-1}$ donc que si $\alpha = -n$, $\left(\frac{1}{t^n}\right)' = -nt^{-n-1} = \frac{-n}{t^{n+1}}$?
[3]En fait la courbe "colle" beaucoup plus à l'asymptote quand $t \to 0^+$, que ne l'indique le dessin mais ce serait au détriment de la lisibilité à cet endroit. Un essai en scilab confirme que la branche infinie en question va vers le point stationnaire très proche de l'asymptote sans point d'inflexion.

2. **En $t_1 = 2$.**
On a $\lim\limits_{t\to 2} x(t) = \frac{5}{2}$. D'autre part $y(t) \underset{t\to 2}{\sim} \frac{1}{2(t-2)}$, donc $y(t)$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) quand $t \longrightarrow 2^+$ (resp. $t \longrightarrow 2^-$). On a donc une asymptote verticale d'équation $x = \frac{5}{2}$. Plus précisément quand $t \longrightarrow 2^+$ $x(t)$ tend vers $(\frac{5}{2})^+$, par exemple parce que $x'(2) > 0$ et la courbe est à droite resp. à gauche de l'asymptote quand $y(t)$ tend vers $+\infty$ (resp.$-\infty$). Voir encore la figure 2.

3. **En $t_2 = 0$.** On a une branche infinie où $x(t)$ et $y(t)$ tendant vers $\pm\infty$, avec, pour $|t|$ assez petit, le signe de t pour $x(t)$ et le signe opposé pour $y(t)$. On trouve
$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{1}{(t-2)(t^2+1)}, \qquad \text{donc} \qquad \lim_{t\to 2} \frac{y(t)}{x(t)} = -\frac{1}{2}$$
On a donc une branche infinie dans la direction de pente $-\frac{1}{2}$. Pour déterminer s'il y a une asymptote (ou une branche parabolique, ou rien des deux) on forme donc $y(t) + \frac{1}{2}x(t)$, qui ici admet un DL facile à écrire.
$$y(t) + \frac{1}{2}x(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t}\right) + \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t}) = \frac{1}{2t-4} + \frac{t}{2}.$$
$$y(t) + \frac{1}{2}x(t) = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{2}} = \frac{t}{2} - \frac{1}{4}(1 + \frac{t}{2} + o(t)) = -\frac{1}{4} + \frac{3t}{8} + o(t)$$
Ce calcul montre que la courbe présente une asymptote oblique d'équation $y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ et le signe de $\frac{3t}{8}$ indique que pour $|t|$ assez petit la courbe est au dessus (resp. au dessous) des son asymptote quand $t > 0$ (resp.quand $t < 0$).

Exercice 3 –
On considère la courbe Γ définie par les équations paramétriques :
$$x(t) = \sin t\,, \quad y(t) = \frac{\sin t}{2 + \cos t}.$$

1) Montrer qu'on peut réduire l'intervalle d'étude à $[0, \pi]$, grace à une symétrie à préciser.

On a $(x(-t), y(-t)) = (-x(t), -y(t))$, autrement dit le point $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'origine. Les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont définies sur $\mathbb{R}$ mais on peut réduire l'intervalle d'étude, d'abord à $[-\pi, \pi]$ grace à la périodicité commune de $x(t)$ et de $y(t)$ puis à $[0, \pi]$, grace à cette symétrie.

2) Etudier les variations de x et de y en précisant les tangentes au point double.

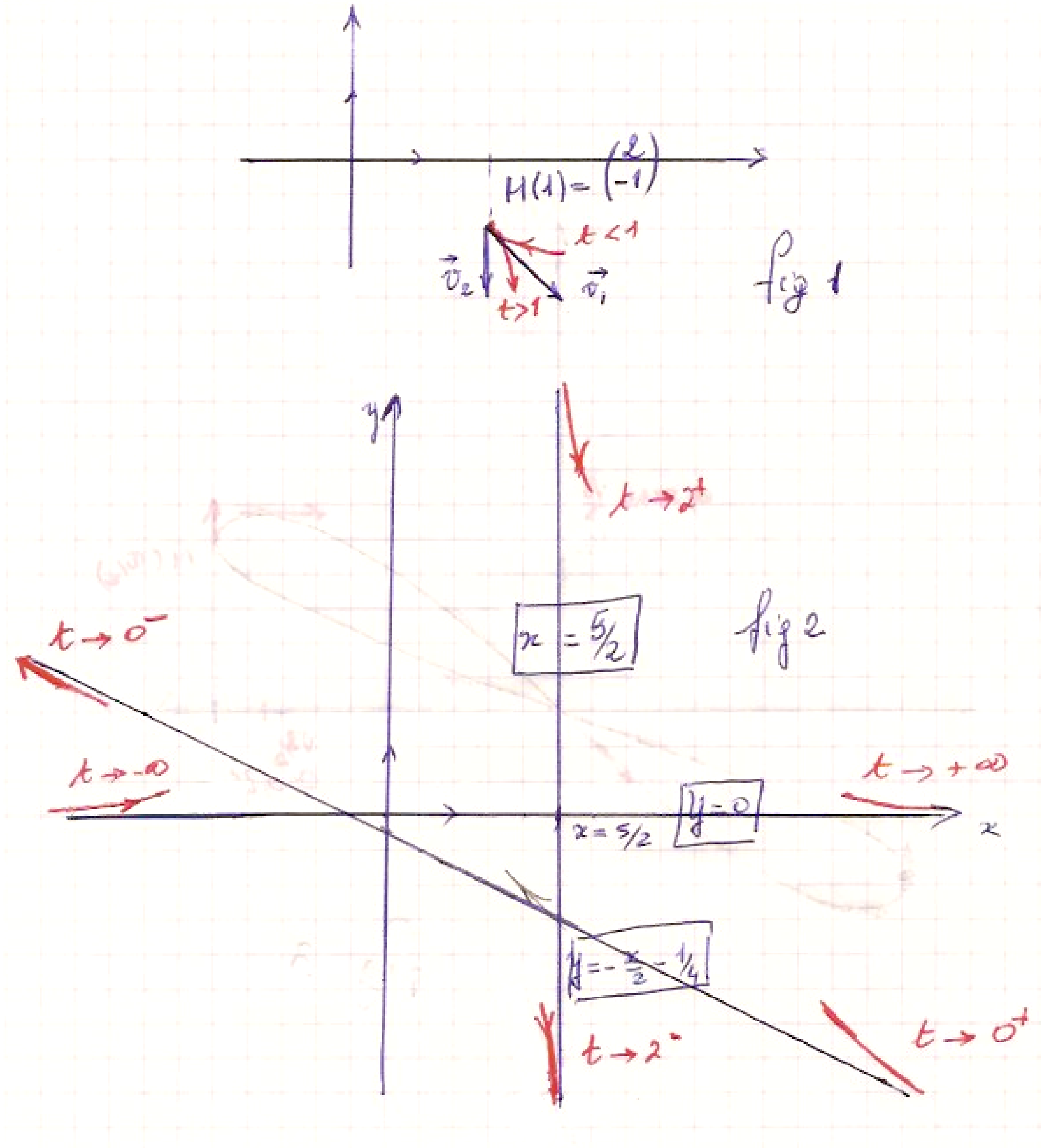
Le dérivées de $x(t), y(t)$ sont :
$$\begin{cases} x'(t) = \cos t. \\ y'(t) = \dfrac{\cos t(2 + \cos t) - \sin t(-\sin t)}{(2 + \cos t)^2} = \dfrac{2\cos t + 1}{(2 + \cos t)^2} \end{cases}$$
Dans l'intervalle $[0, \pi]$, on trouve donc $x'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}$ et $y'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2\pi}{3}$. Il y a donc une tangente verticale en $M(\frac{\pi}{2})$, une tangente horizontale en $M(\frac{2\pi}{3})$ et aucun point stationnaire. L'étude des signe de $x'(t)$ et de $y'(t)$ aboutit au tableau de variations suivant :

t	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$x'(t)$	1	$+$	0	$-$		$-$	-1
$y'(t)$	$\frac{1}{3}$	$+$		$+$	0	$-$	-1
$x(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0

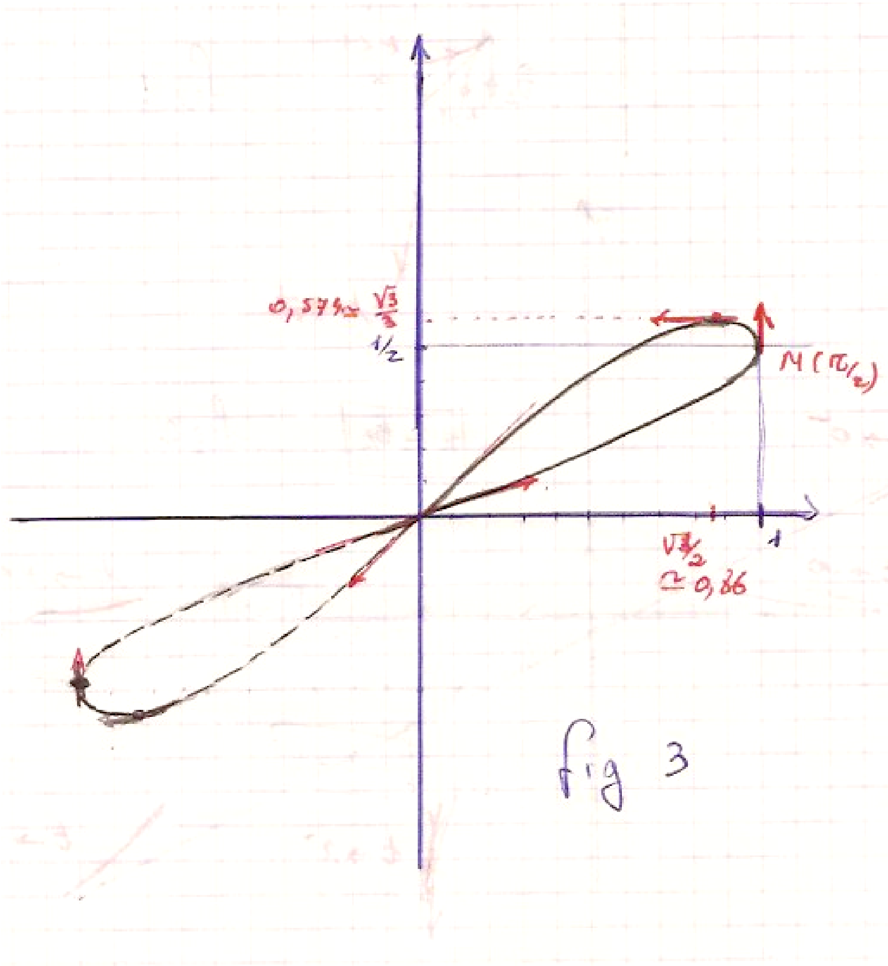
On observe que l'origine est un point double puisque $M(0) = M(\pi) = (0,0)$. Les deux tangentes sont dirigées par les vecteurs $(x'(0), y'(0)) = (1, \frac{1}{3})$ et $(x'(\pi), y'(\pi)) = (-1, -1)$ de pentes respectives $\frac{1}{3}$ et 1.

3) Tracer la courbe d'abord sur $[0, \pi]$ puis la courbe complète.

On réfère à la figure 3 en annexe où figurent les point remarquable indiqué dans la question 2 et où le tracé est d'abord donné quand $t \in [0, \pi]$ conformément au tableau de variations puis la courbe complète est décrite en complétant par la symétrie



Figures 1 et 2



Figures 3