TD sur Chapitre V : Equations différentielles. Méthodes numériques à un pas

M. Granger

Exercice 1

Quelques exemples de calcul et d'illustration des $f^{[k]}$: On suppose que $f(t,y)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ définie dans un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $(a,b) \in U$, domaine de définition de f et $z_{a,b}(t)$ une solution de l'équation différentielle $y' = f(t,y)$, définie au voisinage de a de condition initiale $z(a) = b$.

1) Montrer que $z(t)$ est de classe $\mathcal{C}^3$ et calculer $z"(a)$ et $z^{(3)}(a)$.

2) Déterminer un ouvert $V \subset U$ tel que si $(a,b) \in V$, la fonction $z_{a,b}$ est convexe au voisinage de a. Trouver une condition *suffisante* pour que le graphe de $z_{a,b}$ ait en a un point d'inflexion.

Expliciter le résultat pour l'équation $y' = t - y^2$.

Exercice 2

Cylindre de sécurité et méthode d'Euler : Montrer que dans la situation du théorème de Cauchy-Lipschitz, toute solution approchée affine par morceaux construite par la méthode d'Euler a un graphe contenu dans le cylindre de sécurité C.

Exercice 3

Un exemple simple : On considère l'équation $y' = -y$, avec les données initiales $t_0 = 0,\ y_0 = 1$, et la subdivision de $[0,1]$ de pas constant $\frac{1}{10}$, $t_n = \frac{n}{10}$, $n = 0, \cdots, 10$.

1) Donner la solution exacte et l'expression des y_n pour chacune des trois méthodes d'Euler et de Taylor d'ordre 2 et 3. Vérifier que la méthode du point milieu donne *sur cet exemple* la même formule que $\mathcal{T}_2$.

2) Comparer les valeurs numériques pour les approximations y_{10} données par chacune des trois méthodes, et la valeur exacte $z(1)$.

3) Reprendre la méthode d'Euler ou de Taylor d'ordre deux avec un pas quelconque $h = \frac{1}{N}$. Quelle valeur de N doit on choisir pour obtenir sur le calcul de $z(1)$ la même précision que par $(\mathcal{T}_3)$ avec 10 pas.

Exercice 4

On dit que le schéma défini par $\Phi(t,y,h)$ est convergent, si

$$max_n \|y_n - z(t_n)\| \to 0 \text{ quand } h_{max} \to 0$$

Montrer la convergence uniforme de $y(t)$, fonction linéaire par morceaux telle que $y(t_n) = y_n$, vers $z(t)$, lorsque le pas tend vers zéro, en utilisant la continuité uniforme de z sur $[t_0, t_0 + T]$.

Exercice 5

1) On considère un opérateur intégral approché de la forme $\Sigma(f) = h(w_1 f(a) + w_2 f(a+h)) + h^2(w_3 f'(a) + w_4 f'(a+h))$ destiné à l'approximation $\displaystyle\int_a^{a+h} f(x)dx \simeq \Sigma(f)$ pour f de classe $\mathcal{C}^1$. Déterminer les w_i pour que $\Sigma(f)$ soit exact sur l'espace $\mathcal{P}_3$ des polynômes de degré au plus 3. On montrera qu'on peut se ramener au cas de l'intervalle standard $[0,1]$.

2) En appliquant l'opérateur intégral approché de 1) à l'égalité

$$z(t_n + h) - z(t_n) = \int_{t_n}^{t_n+h} f(t, z(t))dt,$$

trouver un schéma numérique **implicite** à un pas pour l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ de condition initiale $y(t_0) = y_0$, où f est localement Lipschitzienne en y.

3) Vérifier sur l'exemple $y' = -y$ qu'on obtient ainsi une précision d'ordre 4.

Exercice 6

On considère le schéma numérique à un pas explicite décrit par les formules suivantes ;

- $p_{n,1} = f(t_n, y_n)$
- $\left[\begin{array}{lcc} t_{n,2} & = & t_n \ + \ \alpha\, h_n \\ y_{n,2} & = & y_n + h_n \alpha f(t_n, y_n) \\ p_{n,2} & = & f(t_n + \alpha h_n \ , \ y_n + h_n \alpha f(t_n, y_n)) \end{array}\right.$
- $\left[\begin{array}{lcc} t_{n+1} & = & t_n \ + \ h_n \\ y_{n+1} & = & y_n + h_n \big[b p_{n,1} + (1-b) p_{n,2} \big] \end{array}\right.$

où $\alpha \in [0, 1]$.

1) Pour quelle valeur de α et de b retrouve-t-on la méthode du point milieu ? Décrire le schéma proposé en s'inspirant de ce cas particulier. Que trouve-t-on pour $\alpha = 0$?

2) Expliciter la fonction Φ. Montrer que la méthode est consistante. Montrer qu'elle est stable si f est localement Lipschitzienne en y.

3) Effectuer un développement limité de Φ par rapport à h, en introduisant $f(t, y)$ et $f^{[1]}(t, y)$, et comparer le résultat obtenu à la fonction Φ pour la formule de Taylor d'ordre 2. Montrer que pour chaque $\alpha \in]0, 1]$, il existe une unique valeur de b pour laquelle la méthode est d'ordre 2.

Exercice 7

Soit $y' = f(t, y)$, avec $y_0 = \alpha$. On rappelle que l'agorithme de Taylor d'ordre q s'écrit :

$$y_{n+1} = y_n + hT_q(t_n, y_n, h_n),$$

avec

$$T_q(t, y, h) = \sum_{k=1}^{q} \frac{h^{k-1}}{k!} f^{[k-1]}(t, y).$$

Dans la ces où les dérivées partielles $\partial f(t, y)$ se calculent aisément, on propose l'algorithme suivant, appelé "mixed Runge-Kutta-Taylor method" :

$$y_{n+1} = y_n + hG_3(t_n, y_n, h)$$

avec

$$G_3(t_n, y_n, h) = f(t_n, y_n) + \frac{h}{2} f^{[1]}(t_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{h}{3} f(t_n, y_n))$$

1) En comparant G_3 et T_3, montrer que G_3 est aussi d'ordre 3. Quel avantage selon vous présente G_3 par rapport à la méthode de Taylor d'ordre 3.

2) On se propose de tester cette méthode sur l'exemple très simple suivant :

$$y' = 1 - y \ \text{ avec } y(0) = 2 \ \text{ et } t_n = nh$$

a) Calculer explicitement y_n dans la méthode G_3 en fonction de n et h.

b) Prenons $h = 0,1$. Calculer $y(\frac{1}{2})$. Comparer à la valeur $z(\frac{1}{2})$ de la solution exacte.

TD sur : Equations différentielles et méthodes numériques. Corrigé des exercices.

Exercice 1

1) Il s'agit d'une question de cours. D'après la section "sur la régularité des solutions" $z(t)$ est de classe $\mathcal{C}^3$ avec :

$$z"(a) = f^{[1]}(a, z(a)) = \frac{\partial f}{\partial t}(a,b) + f(a,b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

$$z^{(3)}(a) = f^{[2]}(a, z(a)) = \Big[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2f.\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} + f^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + f(\frac{\partial f}{\partial y})^2 + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial y}\Big]\Big|_{x=a,y=b}.$$

2) Si $z"(a) > 0$, la fonction $z"$ reste strictement positive par continuité dans un voisinage de a, ce qui implique la convexité de la solution z dans un voisinage de 0. L'ouvert demandé est donc défini par l'inégalité : $f^{[1]}(a,b) > 0$. De même la solution est concave au voisinage en tout point (a,b) de l'ouvert V' défini par $f^{[1]}(a,b) < 0$.

Les seuls points où la solution z *peut* avoir un point d'inflexion sont les points du fermé $F = U \setminus (V \cup V')$ défini par l'équation $f^{[1]}(a,b) = 0$. Pour garantir que la concavité de z change effectivement en a, on sait qu'il **suffit** (mais ce n'est pas une condition necessaire) que $z"(a) = 0$ et $z^{(3)} \neq 0$ ce qui, d'après la question 1), donne les conditions suivantes qui ne dépendent que du point (a,b) :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(a,b) + f(a,b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0\ ,\ \ \Big[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2f.\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} + f^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + f(\frac{\partial f}{\partial y})^2 + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial y}\Big]\Big|_{x=a,y=b} \neq 0$$

Dans le cas $f(t,y) = t - y^2$, on a $\frac{\partial f}{\partial t} = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$, donc on trouve :

$$f^{[1]}(t,y) = 1 - 2y(t - y^2) = 1 - 2yt + 2y^3$$

$$f^{[2]}(t,y) = -2(t-y^2)^2 + 4y^2(t-y^2) - 2y = (t-y^2)(6y^2 - 2t) - 2y$$

L'ouvert V est le domaine (connexe) défini par l'inégalité $1 - 2yt + 2y^3 > 0$. Les points (t_0, y_0) en lesquels la solution locale z_{t_0,y_0} satisfait à $z"(t_0) = 0$ sont les points situés sur la courbe $\mathcal{C}$ d'équation

$$f^{[1]}(t,y) = 0 \text{ c'est à dire } t = \frac{1}{2y} + y^2.$$

En un point de cette courbe on a $f^{[2]}(t,y) = \frac{1}{2y}(6y^2 - 2(\frac{1}{2y} + y^2)) - 2y = -\frac{1}{2y^2}$. Ceci prouve qu'en tous les points de la courbe $\mathcal{C}$, $z"_{t_0,y_0} < 0$, donc que la concavité de la solution locale change de signe (passant du positif au négatif). Tous les points de $\mathcal{C}$ sont donc des points d'inflexion.

Exercice 2

Rappelons que par définition d'un cylindre de sécurité $[t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0) = K$, on a :

$$T \leq \frac{r_0}{M} \ , \quad \text{avec} \quad \sup_{(t,y)\in K} \|f(t,y)\| \leq M$$

Par conséquent par la définition des y_n par la formule de récurrence d'Euler implique :

$$\|y_{n+1} - y_n\| = \|h_n \cdot f(t_n, y_n)\| \leq h_n \cdot M \leq h_n \frac{r_0}{T}$$

Donc si le schéma comporte N pas et $t_N - t_0 = T$, on en déduit pour tout $n \in \{0, \ldots, N-1\}$:

$$\|y_n - y_0\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|y_{k+1} - y_k\| \leq q \sum_{k=0}^{n-1} h_k \frac{r_0}{T} = (t_n - t_0)\frac{r_0}{T} \leq r_0$$

On peut donc bien affirmer que $y_0 \in \overline{B}(y_0, r_0)$, donc $(t_n, y_n) \in K$ comme annoncé.

Exercice 3

1) La solution exacte est connue : $z(t) = e^{-t}$, ce qui permettra de comparer aisément différentes méthodes quant à leur précision en fonction du pas.

On trouve de façon quasi immédiate : $f(t,y) = -y$, $f^{[1]}(t,y) = y$ et en général $f^{[k]}(t,y) = (-1)^{k-1}y$. Donc pour les méthodes d'Euler et de Taylor d'ordre 2 et 3 les formules d'itération $y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n, y_n) + \ldots + f^{[q-1]}(t_n, y_n)$ donnent respectivement :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n - h_n y_n & \text{pour Euler ,} \\ y_{n+1} = y_n - h_n y_n + \frac{h_n^2}{2} y_n & \text{pour } \mathcal{T}_2 \ , \\ y_{n+1} = y_n - h_n y_n + \frac{h_n^2}{2} y_n - \frac{h_n^3}{6} y_n & \text{pour } \mathcal{T}_3 \ . \end{cases}$$

d'où par une récurrence immédiate le calcul explicite de y_n, dans le cas d'un pas constant h :

$$\begin{cases} y_n = y_0(1-h)^n & \text{pour Euler ,} \\ y_n = y_0(1 - h + \frac{h^2}{2})^n & \text{pour } \mathcal{T}_2 \ , \\ y_n = y_0(1 - h + \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6})^n & \text{pour } \mathcal{T}_3 \ . \end{cases}$$

La méthode du point milieu $y_{n+1} = y_n + h_n f(t_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} f(t_n, y_n))$, s'écrit de façon simple dans ce cas particulier :

$$y_{n+1} = y_n - h_n(y_n + \frac{h_n}{2} f(t_n, y_n))) = y_n - h_n(y_n - \frac{h_n}{2} y_n)$$

et on retrouve ici la même formule que pour $\mathcal{T}_2$.

2) Avec la subdivision de $[0,1]$ de pas constant $\frac{1}{10}$, $t_n = \frac{n}{10}$, $n = 0, \cdots, 10$, et la condition initiale $(t_0, y_0) = (0, 1)$, les formules explicites pour y_n sont :

$$\begin{cases} y_n = 0.9^n & \text{pour Euler ,} \\ y_n = 0.905^n & \text{pour } \mathcal{T}_2 \ , \\ y_n = (0.905 - 1/6000)^n \approx 0,904833^n & \text{pour } \mathcal{T}_3 \ . \end{cases}$$

Pour $n = 10$ on obtient des approximations y_{10} de $z(1) = 1/e \approx 0.367879$:

$$\begin{cases} 0.9^{10} \approx 0.348678 & \text{pour Euler,} \\ 0.905^{10} \approx 0.368540 & \text{pour } \mathcal{T}_2 \\ 0.904833^{10} \approx 0.367863 & \text{pour } \mathcal{T}_3 \end{cases}$$

On constate des erreurs respectives de l'ordre de 2.10^{-2}, 6.610^{-4}, 1.610^{-5}.

3) En général les formules d'Euler et Taylor d'ordre 2 fournissent pour la subdivision de $[0,1]$ en N intervalles les approximations de $z(1)$

$$y_N = (1 - \frac{1}{N})^N \quad \text{et} \quad y_N = (1 - \frac{1}{N} + \frac{1}{2N^2})^N$$

Pour obtenir par Euler la même approximation que par $\mathcal{T}_3$ en 10 pas, il faut réaliser, puisqu'il s'agit d'une approximation par défaut $(1 - \frac{1}{N})^N > 0.367863$. On trouve $N > N_0$ de l'ordre de 11000 . De même pour l'approximation par excès par $\mathcal{T}_2$, il faut réaliser $(1 - \frac{1}{N} + \frac{1}{2N^2})^N < 0.367895$. Il suffit de prendre alors N de l'ordre de 65.

Exercice 4

Par définition d'une fonction linéaire par morceaux, $y(t) - y_n = \frac{t-t_n}{h_n}(y_{n+1} - y_n)$, donc $\|y(t) - y_n\| \leq \|y_{n+1} - y_n\| = h_n\|f(t_n, y_n)\| = h_n \cdot M$.

D'autre part par le théorème des accroissement finis

$$\|z(t) - z(t_n)\| \leq (t - t_n) \sup_{t_n \leq s \leq t} \|z'(s)\| = (t - t_n) \sup_{t_n \leq s \leq t} \|f(s, z(s))\| \leq h_n M.$$

On en déduit pour tout t et en choisissant l'indice n convenable tel que $t \in [t_n, t_{n+1}]$, la majoration :

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \|y(t) - y_n\| + \|y_n - z(t_n)\| + \|z(t_n) - z(t)\| \leq 2h_n M + \|y_n - z(t_n)\|$$

Donc

$$(*) \qquad \sup_{t \in [t_0, t_0+T]} \|y(t) - z(t)\| \leq 2h_{max}M + max_n\|y_n - z(t_n)\|.$$

La notion de convergence signifie selon la définition du cours que $max_n\|y_n - z(t_n)\| \to 0$ quand $h_{max} \to 0$. Il en est donc de même d'après la majoration $(*)$ de la norme du sup $\|y - z\|_\infty = \sup_{t \in [t_0, t_0+T]} \|y(t) - z(t)\|$.

Exercice 5

1) Par le changement de variable $x = a + uh$ l'intégrale étudiée devient :

$$(1) \qquad \int_a^{a+h} f(x)dx = \int_0^1 f(a + uh)d(uh) = h \int_0^1 g(u)du$$

avec $g(u) = f(a+uh)$. Par ailleurs comme $g'(u) = hf'(a+uh)$, l'opérateur intégral approché s'exprime en fonction de g :

$$(2) \qquad \Sigma(f) = h(w_1 g(0) + w_2 g(1)) + h(w_3 g'(0) + w_4 g'(1)) := h\Sigma_0(g)$$

On en déduit que Σ est exact sur f, si et seulement si l'O.I.A. normalisé (avec $h = 1$), $\Sigma_0(g) = w_1 g(0) + w_2 g(1) + w_3 g'(0) + w_4 g'(1)$ est exact sur g. La correspondance $f \to g$ étant une bijection de $\mathcal{P}_3$ vers lui-même, on voit donc qu'il suffit de traiter le cas de Σ_0 pour trouver les w_i. L'exactitude respectivement sur les monômes $1, x, x^2, x^3$ donne le système :

$$\begin{array}{lllll}
\int_0^1 dx & = & 1 & = & w_1 + w_2 \\
\int_0^1 x dx & = & 1/2 & = & w_2 + w_3 + w_4 \\
\int_0^1 x^2 dx & = & 1/3 & = & w_2 + 2w_4 \\
\int_0^1 x^3 dx & = & 1/4 & = & w_2 + 3w_4
\end{array}$$

En résolvant ce système on trouve : $w_1 = w_2 = 1/2$, $w_3 = 1/12$, $w_4 = -1/12$. Donc :

$$\Sigma(f) = \frac{h}{2}(f(a) + f(a + h)) + \frac{h^2}{12}(f'(a) - f'(a + h))$$

2) La construction du schéma numérique demandé consiste à substituer d'abord à l'égalité

$$z(t_n+h)-z(t_n)=\int_{t_n}^{t_n+h} f(t,z(t))dt,$$

l'approximation

$$\begin{aligned}z(t_n+h)-z(t_n) &\sim \Sigma(f(t,z(t))\\ &=\frac{h}{2}\big[f(t_n,z(t_n))+f(t_n+h,z(t_n+h))\big]+\frac{h^2}{12}\big[f^{[1]}(t_n,z(t_n))-f^{[1]}(t_n+h,z(t_n+h))\big],\end{aligned}$$

avec l'opérateur Σ pour l'intervalle $[a,a+h]=[t_n,t_n+h]$, et où on a tenu compte de $z'(t)=f(t,z(t))$ et $\frac{d}{dt}\big[f(t,z(t))\big]=z"(t)=f^{[1]}(t,z(t))$. On construit alors la relation de récurrence en y remplaçant $\sim$ par une égalité et $z(t_n)$ par y_n, $z(t_n+h)$ par y_{n+1} :

$$y_{n+1}-y_n=\frac{h}{2}\big[f(t_n,y_n)+f(t_n+h,y_{n+1})\big]+\frac{h^2}{12}\big[f^{[1]}(t_n,y_n)-f^{[1]}(t_n+h,y_{n+1})\big].$$

Il s'agit d'un schéma *implicite* parce que y_{n+1} intervient aussi dans le membre de droite. On en tire en général une solution implicite de la forme $y_{n+1}=\psi(t_n,y_n,h)$ car on voit facilement que le théorème des fonctions implicites s'applique pour h assez petit.

3) Dans le cas $y'=-y$, on a $f(t,y)=-y$ et $f^{[1]}(t,y)=y$ et la relation de récurrence se simplifie beaucoup :

$$y_{n+1}=y_n-\frac{h}{2}\big(y_n+y_{n+1}\big)+\frac{h^2}{12}\big(y_n-y_{n+1}\big)$$

donc

$$y_{n+1}=\frac{1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{12}}{1+\frac{h}{2}+\frac{h^2}{12}}y_n$$

Un calcul de développement limité en pour h voisin de 0 donne alors : $y_{n+1}=\big(1-h+\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{6}+\frac{h^4}{24}+o(h^4)\big)y_n$. On constate donc que sur cet exemple la méthode proposée est d'ordre 4, puisqu'elle coincide avec celle qu'on obtiendrait par la méthode de Taylor d'ordre 4.

Exercice 6

1) Soit Φ_α la fonction Φ associée au schéma proposé. A partir de la question 2), on la notera simplement Φ. Pour $\alpha=1/2$, $y_{n,2}=y_n+\frac{h_n}{2}f(t_n,y_n)$ est l'approximation de $z(t_n+\frac{h_n}{2})$, utilisée dans la méthode du point milieu, et $p_{n,2}$ devient alors

$$p_{n,2}=f(t_n+\alpha h_n\ ,\ y_n+\frac{h_n}{2}f(t_n,y_n))$$

approximation de $z'(t_n+\frac{h_n}{2})$ qui n'est autre que la fonction $\Phi_{\frac{1}{2}}$ de cette méthode. Pour que le schéma proposé coincide avec cette méthode, il suffit donc de prendre $b=0$.

En général $y_{n,2}$ et $p_{n,2}$ sont des approximations respectives des valeurs de z et z' au point $t_n+\alpha h_n$. La fonction Φ_α est alors la moyenne, pondérée par b et $1-b$, de $z'(t_n)=f(t_n,y_n)=p_{n,1}$ et de $p_{n,2}$.

Si $\alpha=0$ on a $p_{n,1}=p_{n,2}$, et on retrouve la méthode d'Euler.

2)

$$\Phi(t,y,h)=bf(t,y)+(1-b)f(t+\alpha h,y+\alpha hf(t,y))$$

Donc $\Phi(t,y,0)=bf(t,y)+(1-b)f(t+0,y+0))=f(t,y)$, ce qui est la condition nécessaire et suffisante de consistance.

Soit L la constante de Lipschitz pour f :

$$\forall(t,y_1),(t,y_2)\in U\ ,\ |f(t,y_1)-(t,y_2)|\leq L\cdot|y_1-y_2|$$

On suppose qu'on s'est placé sur un compact K de U, tel que si $(t, y, h) \in K \times [-\delta, \delta]$, on a $(t+\alpha h, y+\alpha h f(t, y)) \in U$. Pour un tel (t, y, h), $\Phi(t, y, h)$ a un sens, et ceci légitime le calcul suivant :

$$\begin{aligned}|\Phi(t, y_1, h) - \Phi(t, y_2, h)| &\leq |b| \cdot |f(t, y_1) - f(t, y_2)| + |1-b| \cdot |f(t+\alpha h, y_1 + \alpha h f(t, y_1)) - f(t+\alpha h, y_2 + \alpha h f(t, y_2) \\ &\leq |b| \cdot L|y_1 - y_2| + |1-b| \cdot L\big(|y_1 - y_2| + \alpha h |f(t, y_1) - f(t, y_2)|\big) \\ &\leq \Big(|b|L + |1-b|L(1+\alpha L h)\Big) \cdot |y_1 - y_2| \leq \Big(|b|L + |1-b|L(1+\alpha L\delta)\Big) \cdot |y_1 - y_2|\big)\end{aligned}$$

Ceci prouve le caractère Lipschitzien en y donc établit la stabilité d'après le théorème 4 du cours.

3) On va effectuer un développement limité à deux termes par rapport à h de la fonction Φ du schéma :

$$\begin{aligned}\Phi(t, y, h) =& bf(t, y) + (1-b) f(t+\alpha h \ , \ y + h\alpha f(t, y)) \\ =& bf(t, y) + (1-b)\Big[f(t, y) + h\frac{\partial}{\partial h}\big[f(t+\alpha h \ , \ y + h\alpha f(t, y))\big]_{|h=0} + o(h)\Big] \\ =& bf(t, y) + (1-b)\Big[f(t, y) + h\big(\alpha\frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + \alpha f(t, y)\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)\big) + o(h)\Big] \\ =& f(t, y) + (1-b)\alpha h f^{[1]}(t, y) + o(h)\end{aligned}$$

Dans le cas de la méthode de Taylor d'ordre 2, la fonction Φ associée au schéma vaut $\mathcal{T}_2(t, y, h) = f(t, y) + \frac{1}{2}hf^{[1]}(t, y)$, donc le schéma proposé sera d'ordre au moins deux si les développements coincident à l'ordre deux [1]

Ceci donne la valeur optimale de b :

$$(1-b)\alpha = \frac{1}{2}, \ \text{ soit } b = 1 - \frac{1}{2\alpha}.$$

Exercice 7

1) Appliquons la formule de Taylor à $f^{[1]}$:

$$f^{[1]}(t + \frac{h}{3}, y + \frac{h}{3}f(t, y)) = f^{[1]}(t, y) + \frac{h}{3}\frac{\partial f^{[1]}}{\partial t}(t, y) + \frac{h}{3}f(t, y)\frac{\partial f^{[1]}}{\partial y}(t, y) + o(h^2)$$

On reconnait dans le membre de droite l'expression de $f^{[2]} = \frac{\partial f^{[1]}}{\partial t} + f\frac{\partial f^{[1]}}{\partial y}$, qui permet décrire :

$$\begin{aligned}G_3(t, y, h) =& f(x, y) + \frac{h}{2}[f^{[1]}(t, y) + \frac{h}{3}\frac{\partial f^{[1]}}{\partial t}(t, y) + \frac{h}{3}f(t, y)\frac{\partial f^{[1]}}{\partial y}(t, y)] + o(h^3) \\ =& f(x, y) + \frac{h}{2}f^{[1]}(t, y) + \frac{h^2}{6}f^{[2]}(t, y) + o(h^3) = T_3(t, y, h) + o(h^3)\end{aligned}$$

On en déduit que G_3 est d'ordre 3 comme le schéma T_3. L'avantage de G_3 est que la fonction Φ peut s'exprimer sans avoir recours à la fonction $f^{[2]}$, c'est à dire aux dérivées secondes de f.

2) On a $f(t, y) = 1 - y$ et $f^{[1]}(t, y) = \frac{\partial f}{\partial t} + (1-y)\frac{\partial f}{\partial y} = y - 1$, et il vient donc pour G_3 :

$$G_3(t, y, h) = (1-y) + \frac{h}{2}(y + \frac{h}{3}(y-1) - 1) = 1 - y + \frac{h}{2}(y-1) + \frac{h^2}{6}(1-y).$$

On a donc :

$$\begin{aligned}y_{n+1} =& y_n + h - hy_n + \frac{h^2}{2}(y_n - 1) + \frac{h^3}{6}(1 - y_n) \\ =& (1 - h + \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6})y_n + h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6}\end{aligned}$$

Ceci revient à $y_{n+1} - 1 = \alpha(y_n - 1)$ où $\alpha = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6}$. Donc par récurrence :

[1] En effet pour f de classe $\mathcal{C}^2$ au moins $e_n = z(t_{n+1}) - z(t_n) - h_n\Phi(t_n, y_n, h_n) = h_n\big[\mathcal{T}_2(t_n, y_n, h_n) + O(h_n^2)\big] - h_n\Phi(t_n, y_n, h_n) = h_n^2(\frac{1}{2} - (1-b)\alpha)f^{[1]}(t_n, y_n) + O(h_n^3)$

$$\boxed{y_n = \alpha^n y_0 + 1 - \alpha^n = 1 + \alpha^n}$$

b) Application numérique : $h = 0.1$ $u = 1 - 0.1 + \frac{0.01}{2} - \frac{0.001}{6} \simeq 0.904833$

La solution du problème de Cauchy est $z(t) = 1/e^{-t}$ et on trouve $y_{10} = 1.606517$, contre $z(\frac{1}{2}) = 1.606530$.