UNIVERSITE D'ANGERS Mathematiques L2.

Devoir 1. A rendre au plus tard au cours du mardi 22/10.

Exercice 1 :

Donner un développement limité à l'ordre 2 en 0 de

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}}.$$

En composant le D.L. $(1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}u + o(u)$, avec $u = x^2$, on trouve :

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \quad \text{et ensuite} \quad 1 + x + \sqrt{1+x^2} = 2 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

Ainsi on obtient le résultat par division de deux D.L.

$$f(x) = \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{2 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)$$

En déduire un développement à l'ordre 2 en $+\infty$ par rapport à $\frac{1}{x}$.

Par un calcul élémentaire on trouve *pour* $x > 0$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}}{\frac{1}{x}(1+x+\sqrt{1+x^2})} = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}}{1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}}.$$

On constate donc que $f(x) = f(\frac{1}{x})$ et en appliquant le résultat précédent par substitution de $\frac{1}{x}$ dans le D.L. de f en 0 on trouve le D.L. quand $x \to +\infty$:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x}\right)^2$$

Remarque. C'est une erreur monumentale d'écrire qu'il suffit en général pour une fonction f quelconque définie sur $[0, +\infty)$ de substituer $\frac{1}{x}$ dans son D.L. en 0 pour obtenir son D.L. en $+\infty$. C'est uniquement à cause de l'identité $f(x) = f(\frac{1}{x})$ que c'est ce qui se passe dans cet exemple. La vérification de cette identité y est un donc passage obligé.

Exercice 2 : Déterminer la limite suivante

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x - \cos x + 1}{x^3}$$

On considère les D.L. à l'ordre 3 :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

Donc en les combinant comme indiqué on trouve pour le numérateur de l'expression proposée :

$$\ln(1+x) - \sin x - \cos x + 1 = -1 + 1 + (x - x) - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

Conclusion

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x - \cos x + 1}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2}$$

Exercice 3 : 1) Déterminer les branches infinies et préciser leur nature pour la courbe paramétrée

$$x = \frac{t}{t^2-1}, y = \frac{t^2}{t-1}$$

Il y a quatre valeurs de t à prendre en considération : $-\infty, -1, 1, +\infty$. En rassemblant les cas $t \to -\infty$ et $t \to +\infty$, cela donnera en fait trois asymptotes avec les comportements de part et d'autre à regarder à chaque fois. Résumons dans un tableau les limites de x et y pour chacune de ces valeurs :

t	$-\infty$	$(-1)^-$	$(-1)^+$	1^-	1^+	$+\infty$
$x(t)$	0	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$y(t)$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Branche 1 : quand $t \to -\infty$, on trouve l'asymptote verticale $x = 0$ c'est à dire l'axe des ordonnées. Comme $x(t) \underset{t\to-\infty}{\sim} \frac{1}{t}$, la courbe est à gauche de son asymptote.

Branche 1 bis : de la même façon quand $t \to +\infty$, la droite $x = 0$ est encore asymptote et la courbe est à droite de l'axe des y pour $t \to +\infty$.

Branche 2 : quand $t \to -1$ on trouve l'asymptote horizontale $y = -\frac{1}{2}$. Le signe de la limite de x à gauche et à droite de $t \to -1$ est justifié par

$$x(t) \underset{t\to-1}{\sim} \frac{t}{t-1}_{|t=-1} \times \frac{1}{t+1} = \frac{2}{t+1}$$

De même l'équivalent :

$$y(t) + \frac{1}{2} = \frac{t^2}{t-1} + \frac{1}{2} = \frac{(t+1)(2t-1)}{2(t-1)} \underset{t\to-1}{\sim} \frac{3}{4}(t+1)$$

montre que la courbe est au dessus (resp. au dessous) de cette asymptote quand $t \to (-1)^+$ (rep. $t \to (-1)^-$).

Branche 3 : quant $t \to 1$, on trouve que $\frac{y(t)}{x(t)} = t(t+1)$ tend vers 2. On a

$$y(t) - 2x(t) = \frac{t^2(t+1) - 2t}{t^2 - 1} = \frac{t(t-1)(t+2)}{t^2-1} = \frac{t(t+2)}{t+1}$$

Donc en posant $t = 1 + h$ et en effectuant un DL facile :

$$y(t) - 2x(t) = \frac{3 + 4h + h^2}{2+h} = \frac{3}{2} + \frac{5}{4}h + o(h)$$

Ce qui établit l'existence de l'asymptote oblique d'équation $y = 2x + \frac{3}{2}$, la courbe étant au dessus (resp. au dessous) de l'asymptote quand $t \to 1$ par valeurs supérieures (resp. inférieures).

On indiquera sur un dessin l'allure des branches infinies et leur position relative à une asymptote éventuelle.

Voir sur le dessin à la fin du corrigé, et les commentaires qui suivent.

2) Déterminer le domaine de définition et étudier les variations de $x(t)$ et $y(t)$ et terminer le dessin en donnant l'allure complète de la courbe.

Le domaine de définition de $t \to (x(t), y(t))$ est $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Calculons les dérivées :

$$x'(t) = \frac{t^2 - 1 - 2t^2}{t^2 - 1} = -\frac{1 + t^2}{(t^2-1)^2} < 0$$

$$y'(t) = \frac{2t(t-1) - t^2}{(t-1)^2} = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}$$

On en tire le tableau de variations suivant :

t	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$x'(t)$		-	$\Vert$	-	$\vert$	-	$\Vert$	-	$\vert$	-	
$y'(t)$		+		+	0	-	$\Vert$	-	0	+	
$x(t)$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	0
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

3) (Facultatif). Trouver $t_1 \neq t_2$, tels que $(x(t_1), y(t_1)) = (x(t_2), y(t_2))$. Expliquer d'abord à partir du dessin pourquoi on recherche une telle paire de valeurs distinctes de t.

Le dessin met en évidence un point de croisement qui permet de soupçonner un point double pour des valeurs du paramètres qui satisfont les inégalités $t_1 < -1 < 0 < t_2 < 1$. On suppose ici que $t_1 < t_2$. Il s'agit de résoudre le système :

$$\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} \frac{t_1}{t_1^2 - 1} = \frac{t_2}{t_2^2-1} \\ \frac{t_1^2}{t_1 - 1} = \frac{t_2^2}{t_2 - 1} \end{cases}$$

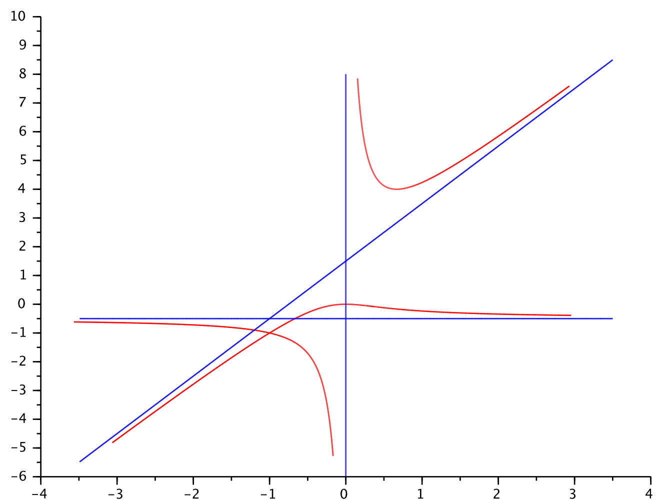
sous la condition $t_1 \neq t_2$ qui permet de simplifier par $t_2 - t_1$. On trouve en chassant les dénominateurs, en simplifiant par $t_2 - t_1$ et en posant $S = t_1 + t_2, P = t_1 t_2$:

$$\begin{cases} t_1(t_2^2-1) - t_2(t_1^2-1) = 0 \\ t_1^2(t_2-1) - t_2^2(t_1-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1t_2(t_2-t_1) + t_2 - t_1 = 0 \\ t_1t_2(t_1-t_2) + (t_2-t_1)(t_2+t_1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P+1 = 0 \\ -P+S = 0 \end{cases}$$

Ainsi $P = S = -1$, et il est bien connu que t_1, t_2 sont les deux solutions de l'équation du second degré $X^2 - SX + P = 0$, donc ici $X^2 + X - 1$.

Conclusion : puisque on a supposé que $t_1 < t_2$ on trouve $t_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, t_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Par un calcul élémentaire le point double est en

$$M(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}) = M(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}) = (-1,-1)$$



Tracédelacourbe

On reconnaitra les trois asymptotes $x = 0$ verticale, $y = -\frac{1}{2}$ horizontale, et $y = 2x + \frac{3}{2}$ oblique. L'axe des x légèrement au dessus de l'asymptote horizontale n'a pas été figuré.

Pour suivre le tracé dans le sens des t croissants, et controler la position indiquée dans la question 1 de la courbe par rapport aux asymptotes il est conseillé de flécher le dessin en notant qu'il part pour t venant de $-\infty$ de l'asymptote verticale en bas vers l'asymptote horizontale, quand $t \to (-1)^-$. Il repart de la même asymptote coté droit pour rejoindre l'asymptote oblique en bas à gauche quand t parcourt $]-1,+1[$, etc... pour finir à la verticale.

N.B. Il serait judicieux de chercher aussi un poid'inflexion pour une valeur de t dans $]-1,0[$. C'est laissé en exercice. Résoudre $\left(\frac{x'(t)}{y'(t)}\right)' = 0$. On peut factoriser $t^2 - 1$ dans le numérateur de l'expression obtenu et on trouve pour le point d'inflexion une valeur $\alpha \in]-1,0[$ qui est l'unique racine de l'équation $t^3 + 3t + 1$.