Courbes et surfaces. Devoir I.

Exercice 0 : Montrer que le plan passant par trois points non co-linéaires p_i, $i = 1, 2, 3$ a pour équation $\langle (p - p_1) \wedge (p - p_2), p - p_3 \rangle = 0$, où $p = (x, y, z)$.

Exercice 1 : Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane de paramétrisation normale, et de courbure partout non-nulle. Soit la courbe $s \mapsto C(s)$ parcourant les centres de courbure. Cette courbe est appelée **la développée** de γ. La courbe γ est alors appelée **une développante** de C).

(a) Montrer que pour tout s, la tangente de C au point $C(s)$ concide avec la normale de $\gamma(s)$. Ainsi la développée de γ est aussi l'enveloppe de la famille des normales de γ.

(b) Supposons que $k'(s) < 0$ et $k(s) > 0$ sur I. Montrer que la longueur d'arc sur $C(s)$ de s_0 vers $s_1 > s_0$ est $R(s_1) - R(s_0)$, où $R(s)$ désigne le rayon de courbure de γ au point $\gamma(s)$. Relier le repère de Frénet de $C(s)$ avec celui de $\gamma(s)$. Montrer que $k_C(s) = -k(s)^3/k'(s)$ et que $R_C(s) = R(s)R'(s)$. En déduire que la développée n'a pas de point d'inflexion.

Exercice 2 : La **chaînette**[1] de paramètre $a = 1$ est la courbe dans un de paramétrage dans un repère orthonormé $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cosh t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$. Montrer que $k(t) = 1/\cosh^2 t$, et que sa développée est $C(t) = \begin{pmatrix} t - \sinh t \cdot \cosh t \\ 2\cosh t \end{pmatrix}$.

Exercice 3 : Donner la longueur d'arc ainsi que la courbure pour une courbe en coordonnées polaires $\theta \mapsto \rho(\theta)$.

Exercice 4 : Soit γ une courbe plane régulière. Un point où $k(t) = 0$ est appelé un point *d'inflexion*. La **podaire** de γ est définie par :

$$\delta(t) = \langle \gamma(t), N(t) \rangle N(t).$$

(a) Donner une interprétation géométrique de $\delta(t)$.

(b) Montrer que pour la parabole $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}$, la podaire est une cissoïde de Dioclès. Chercher d'abord la définition dans : http ://fr.wikipedia.org/wiki/Cissoide_de_Dioclès
et traiter l'exercice 5.

(c) Lorsque $t = s$ est une paramétrisation normale, montrer que $\delta' = -k(s)(\langle \gamma, T \rangle N + \langle \gamma, N \rangle T)$. Est-ce que δ est de paramétrisation normale ?

(d) Montrer que les points singuliers de δ sont les points où γ passe par $\vec{0}$ ou bien les points d'inflexion de γ.

Exercice 5 : Démontrer à partir de sa définition géométrique que la cissoïde de Dioclès est dans un repère convenable

$$\begin{cases} x(t) = \frac{2at^2}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{2at^2}{1+t^2} \end{cases}$$

[1] Voir à la fin une notice qui explique la raison de ce terme.

Exercice 6 : Pseudo-hélices.

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe de paramétrisation normale telle que la torsion $\tau(s)$ soit partout non nulle.

(a) Supposons que $s \mapsto \dfrac{k(s)}{\tau(s)}$ est constante sur I. Montrer qu'il existe θ un angle indépendent de s tel que $\dfrac{k(s)}{\tau(s)} = \tan\theta$. En déduire que le vecteur $V(s) := (\cos\theta)T(s) + (\sin\theta)B(s)$ est un vecteur unitaire, constant, et formant un angle fixe avec $T(s)$.

(b) Réciproquement supposons que les tangentes de γ font un angle constant avec un vecteur unitaire fixe V_0. Montrer que $\gamma(s) + V_0$ est dans le plan rectifiant [2] de γ au point $\gamma(s)$ et que $s \mapsto \dfrac{k(s)}{\tau(s)}$ est constante.

Exercice 7 :

J'enverrai séparément et hors devoir un exercice sur les enveloppes de droites.

Vous trouverez sur le site suivant une explication de la raison liée à la mécanique d'appeler la courbede l'exercice 2 une chaînette :

http ://www.mathcurve.com/courbes2d/chainette/chainette.shtml

Comme quoi on est environné de chainettes en toute occasion où un fil est suspendu entre deux points fixes.

Je cite un extrait "Courbe tudie par Leibniz, Jean Bernoulli et Huygens en 1691. Sous sa forme latine catenaria, le nom est d Huygens. Autres noms : courbe funiculaire, vlaire."

Pour l'anecdote : Galilée croyait que la réponse à la question de mécanique est une parabole. errare humanulm est.

A noter aussi que cette page fait partie d'un site plus large : http ://www.mathcurve.com/

qui est une mine inépuisable d'exemples commentés sur toutes sortes de courbes. courbes Ce site a été primé.

[2] On appelle ainsi le plan engendré par les vecteurs $\overrightarrow{t(s)}, \overrightarrow{b(s)}$