UNIVERSITE D'ANGERS
ENSEMBLE SCIENTIFIQUE

Master de Mathématiques 1ère année.

Contrôle continu, analyse numérique 03/11/2010

$\boxed{\text{I}}$

1) On considère la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix},$$

définie par $A_n(i,j) = min(i,j)$. Est ce que A_n est diagonalisable?

La matrice A est symétrique et à coefficients réels. Elle est donc diagonalisable.

2)(i) Ecrire la première étape [1], notée $A_n(1)u = b(1)$ de l'algorithme du pivot de Gauss pour le système $A_n u = b$, et calculer notamment la matrice E_1 telle que $E_1 A_n = A_n(1)$.

Soit L_i la $i$ème ligne de la matrice A. Comme le pivot est $a_{1,1} = 1$ et que $a_{i,1} = 1$, la première étape consiste à remplacer L_i par $L_i - L_1 = (1, 1, \dots, 1) - (1, 2, \dots, i, \dots i) = (0, 1, \dots, i-1, \dots i-1)$ pour $i = 2, \dots, n$. Ceci correspond à la multiplication à gauche par une matrice triangulaire E_1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{pmatrix} := A_n(1)$$

Le second membre devient

$$E_1 b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 - b_1 \\ \vdots \\ b_n - b_1 \end{pmatrix}$$

(ii) En déduire la suite de l'algorithme de Gauss et une décomposition LU de la matrice A_n. En déduire une décomposition de Cholesky de A.

On observe l'égalité

$$A_n(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & & & \\ 0 & & A_{n-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

qui fait apparaître la même matrice à l'indice immédiatement inférieur, et permet donc de conclure par une récurrence. Notons $E_1(n)$ la matrice trouvée dans la question 1, ce qui donne l'égalité $E_1(n)A = A_n(1)$. Alors le facteur multiplicatif qui intervient dans la $i$ème étape est

$$E_i := \begin{pmatrix} I_{i-1} & 0_{i-1,n-i+1} \\ 0_{n-i+1,i-1} & E_1(n-i+1) \end{pmatrix}$$

où I_{i-1} désigne la matrice unité carrée de taille $(i-1) \times (i-1)$ et $0_{p,q}$ la matrice rectangulaire nulle de taille $p \times q$ et on obtient l'identité :

$$E_{n-1} \dots E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

[1] qui fait apparaître $(a_{11}, 0, \dots, 0)^T$ comme première colonne de $A_n(1)$

On a aussi popur la transformation du second membre :

$$E_{n-1}\dots E_2E_1 b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 - b_1 \\ b_3 - b_2 \\ \vdots \\ b_n - b_{n-1} \end{pmatrix}$$

On obtient une décomposition $A = LU$ où est le membre de droite de l'équation (1) en posant $L = E_1^{-1}E_2^{-1}\dots E_{n-1}^{-1}$. Selon un règle vue en TD le calcul de L se déduit des E_i par une règle très simple[2]: recopier dans la même position et dans une seule matrice les coefficient non diagonaux changés de signe de tous les E_i. Avec cette régle on constate que L est la transposée de U. La décomposition obtenue est donc aussi une décomposition de Cholesky.

$\boxed{\text{II}}$

On considère le système linéaire $n\times n$, tridiagonal:

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & & & & & & = a_1 \\ -x_1 & 3x_2 & -x_3 & & & & & = a_2 \\ & & \ddots & \dots & & & & \dots \\ & & -x_{k-1} & +(k+1)x_k & -x_{k+1} & & & = a_k \\ & & & \dots & \ddots & & & \dots \\ & & & & -x_{n-2} & nx_{n-1} & -x_n & = a_{n-1} \\ & & & & & -x_{n-1} & +(n+1)x_n & = a_n \end{cases}$$

1) Ecrire la matrice J de la méthode de Jacobi et montrer que son rayon spectral $\rho(J)$ est majoré par 2/3.

La matrice du système est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 3 & -1 & & & & \\ & & \ddots & \dots & & & \\ & & -1 & k+1 & -1 & & \\ & & & \dots & \ddots & & \\ & & & & -1 & n & -1 \\ & & & & & -1 & n+1 \end{pmatrix}$$

et sa matrice de jacobi est $D^{-1}(D-A)$ où A est la matrice diagonale $n\times n$ de diagonale $2, 3, \dots, n+1$. C'est à dire pour être explicite :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & & & & & \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & & & & \\ & & \ddots & \dots & & & \\ & & \frac{1}{k+1} & 0 & \frac{1}{k+1} & & \\ & & & \dots & \ddots & & \\ & & & & \frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} \\ & & & & & \frac{1}{n+1} & 0 \end{pmatrix}$$

où les coefficients hors de la zone tridiagonale de A et de J sont tous nuls.

Le résultat sur les disques de Gerschgorin vu en TD [3] assure la validité de **l'une des** majorations $|\lambda - J_{i,i}| \le \sum_{j\neq i j=1}^{n} |J_{i,j}|$ ce qui donne dans notre cas particulier que pour toute valeur propre λ de J **l'une des** égalités suivantes est satisfaite

$$|\lambda| \le \frac{1}{2}, \quad |\lambda| \le \frac{1}{3} + \frac{1}{3}, \quad \dots, \quad |\lambda| \le \frac{1}{n} + \frac{1}{n}, \quad |\lambda| \le \frac{1}{n+1}.$$

[2] mais contrairement à ce qui a été soutenu par certains il n'y a pas de formule aussi simple pour $E_{n-1}\dots E_2E_1$!

[3] Ce résutat est suffisamment standard pour qu'on trouve sur le web une démonstration complète comme en TD http://fr.wikipedia.org/wiki/Matrice_à_diagonale_dominante http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_Gerschgorin

La conclusion est donc $|\lambda| \leq \frac{2}{3}$ pour tout λ donc $\rho(J) \leq \frac{2}{3}$.

2) Indiquer, sans aucun calcul, si les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent, en justifiant une relation entre les rayons spectraux respectifs des matrices J et $\mathcal{L}_1$ de Gauss-Seidel. A titre d'exemple, pour $n = 3$, calculer le spectre et le rayon spectral de J.

Le rayon spectral de J satisfait à $\rho(J) < 1$, donc d'après un théorème du cours la méthode itérative de Jacobi converge. Puisque la matrice A est tridiagonale on sait que les rayon spectraux respectifs de J et de la matrice de Gauss-Seidel $\mathcal{L}_1$ sont liés par la relation : $\rho(\mathcal{L}_1) = \rho(J)^2$. On a donc $\rho(\mathcal{L}_1) < 1$ et la méthode itérative de Gauss-Seidel converge aussi.

3) On prend ici $n = 20$. On donne le spectre de la matrice ${}^tJJ$ tel que le fournit scilab (2 dernières décimales omises):

$$\begin{aligned} spec({}^tJJ) = (&0.00008, 0.00027, 0.00126, 0.00173, 0.00358, 0.00423, 0.00662, 0.00733, 0.00996, , 0.01074,\\ &0.01426, 0.01545, 0.02166, 0.02388, 0.03682, 0.04167, 0.07633, 0.09051, 0.24913, 0.32905)\end{aligned}$$

Comment en tire t-on la norme de J associée à la norme euclidienne? On donne $\sqrt{0.3290476} = 0.5736267$.

On sait d'après le cours que la norme de J subordonnée à la norme euclidienne est $\|J\|_2 = \sqrt{\rho({}^tJJ)}$. Un examen du tableau proposé montre que $\rho({}^tJJ) = \max(spec({}^tJJ)) \simeq 0.32905$ donc que $\|J\|_2 \simeq 0.5736267$

ii) Donner sous forme matricielle, la formule de récurrence satisfaite par le terme u_n de la méthode itérative de Jacobi, en fonction du second membre b. Soit $\overline{u}$ la solution solution exacte du système. En déduire une majoration de la norme euclidienne de l'erreur $\|e_n\| = \|u_n - \overline{u}\|$ si on choisit la condition inititiale $u_0 = 0$. Pour quelle valeur de n peut on garantir une erreur relative $\frac{\|e_n\|}{\|\overline{u}\|}$ d'au plus 0.1%.

La récurrence demandée est

$$u_{n+1} = Ju_n + D^{-1}b. \tag{2}$$

D'autre part le fait que $\overline{u}$ soit la solution solution exacte du système se traduit par l'égalité

$$\overline{u} = J\overline{u} + D^{-1}b. \tag{3}$$

La soustraction membre à membre des équations (2) et (3) donne $e_{n+1} = Je_n$. Donc finalement par récurrence et compte tenu de la condition initiale $e_0 = u_0 - \overline{u} = -\overline{u}$:

$$e_n = J^n e_0 \text{ et } \|e_n\| = \|J^n\overline{u}\| \leq \|J\|^n\|\overline{u}\| \simeq (0.5736267)^n\|\overline{u}\|$$

La condition demandée $\frac{\|e_n\|}{\|\overline{u}\|} \leq 0.1\% = 0.001$ se traduit donc par $\|J\|^n \geq 0.001$ et numériquement par

$$n \geq \frac{\ln(0.001)}{\ln(\|J\|)} \simeq 12,42 \text{ et on doit donc prendre } n \geq 13.$$

III

Soient $u = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{C}^n$. On se propose d'étudier le spectre de la matrice $A = I + uv^* \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ où $(\bullet)^*$ désigne la transconjugaison. Expliciter le coefficient A_{ij} pour $i = j$ et pour $i \neq j$

La matrice uv^* qui est le *produit dans cet ordre d'une colonne par une ligne* est restangulaire de taille $n \times n$ et de coefficient général $\mu_i\overline{\nu_j}$. Par conséquent

$$\begin{cases} A_{ij} = \mu_i\overline{\nu_j} & \text{si } i \neq j \\ A_{ii} = 1 + \mu_i\overline{\nu_i} \end{cases}$$

1. On suppose dans cette question que $\mu_2 = \cdots = \mu_n = 0$. Déterminer la matrice A et en déduire que :

$$\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow (\lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 1 + v^*u = 1 + \langle u, v\rangle.)$$

en explicitant la multiplicité de chaque valeur propre.

Dans ce cas particulier et si $i \geq 2$ on a $A_{ij} = 0$ pour $j \neq i$ et $A_{ii} = 1$. La matrice A est donc triangulaire de la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1+\mu_1\overline{\nu_1} & \mu_1\overline{\nu_2} & \cdots & \mu_1\overline{\nu_n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il en résulte aussitôt que le spectre de la matrice A est constitué de la valeur propre 1 comptée $n-1$ fois et de la valeur propre $1+\mu_1\overline{\nu_1}$ si cette dernière est non nulle. Si $\mu_1 = 0$ ou si $\overline{\nu_1} = 0$ on doit observer pour être complet que le spectre est $1, \ldots, 1$, avec 1 compté n fois. Dans tous les cas on observe que la première valeur propre s'interprète par le produit scalaire annoncé

$$1+\mu_1\overline{\nu_1} = 1 + (\overline{\nu_1}, \ldots, \overline{\nu_n}) \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = 1 + \langle u, v \rangle \tag{4}$$

2. Retour au cas général.

   (a) Montrer qu'il existe une matrice unitaire Q de taille $n \times n$ telle que $Qu = [\omega_1, 0, \cdots, 0]^T$, où $\omega_1 = \|u\|_2 \in \mathbb{R}$. On pourra utiliser le fait que tout vecteur de norme 1 peut être choisi comme premier vecteur d'une base orthonormée convenable de $\mathbb{C}^n$.

   Le vecteur $v_1 = \frac{u}{\|u\|_2}$ est unitaire ainsi que le premier vecteur $e_1 = [1, 0, \cdots, 0]^T$ de la base canonique $e_1, \ldots, e_n$. On peut compléter $\{v_1\}$ en une base orthonormée $v_1, \ldots, v_n$ de premier vecteur v_1. Il suffit pour cela d'appliquer à une base quelconque commençant par v_1 le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Alors l'application linéaire f telle que $f(v_i) = e_i$ a une matrice unitaire dans la base canonique telle que $Qv_1 = e_1$, ou encore comme demandé $Qu = [\omega_1, 0, \cdots, 0]^T$.

   (b) Montrer que A et $I + Qu(Qv)^*$ ont le même spectre. En déduire le spectre de la matrice A.

   La conjugaison de A par Q^{-1} donne

   $$QAQ^{-1} = Q(I + uv^*)Q^* = I + Quv^*Q^* = I + Qu(Qv)^*$$

   Les matrices A et $I + Qu(Qv)^*$ sont donc semblables et ont donc le même spectre. Or la matrice $I + Qu(Qv)^*$ rentre vu la forme de Qu, dans la cadre de la question 1., si on l' applique aux vecteurs $u_1 = Qu$ et $v_1 = Qv$. La spectre commun de A et de $I + Qu(Qv)^*$ est donc constitué de 1 pris $n-1$ fois et d'après (4) de la valeur propre :

   $$1 + \langle Qu, Qv \rangle = 1 + \langle u, v \rangle$$

   puisque Q comme matrice unitaire conserve le produit scalaire hermitien.